Муниципальное бюджетное образовательное учреждение
«Гимназия №4» г. Чебоксары Чувашской Республики

Несколько интересных задач с решениями

Григорьева Эльвира Михайловна,
учитель математики высшей квалификационной
категории МБОУ « Гимназия № 4»
г. Чебоксары Чувашской Республики

Чебоксары – 2020

Содержание

1. Введение

Решение олимпиадных задач принципиально отличается от решения школьных, даже очень сложных задач. Это обусловлено прежде всего выбором разделов, традиционно рассматриваемых на олимпиадах: принцип Дирихле, элементы теории чисел, четность, логические задачи. Мною выбраны по данным разделам задачи, которые требуют нестандартного подхода и которые изумляют «красотой» решения. В работе описаны и классические идеи решения олимпиадных задач. Для решения некоторых из них достаточно смекалки, логики и пространственного воображения. Другие задачи требуют некоторого опыта, интуиции и наблюдательности.

2. Виды задач

Чётность

Понятие четности возникает при рассмотрении самых различных математических задач. Если элементы произвольного множества могут быть условно разделены на две примерно равные группы с диаметрально противоположными свойствами, то речь идет о чётности. Понятия: левый-правый; по часовой стрелке – против часовой стрелки; черный - белый (для шахматной доски, например), женский- мужской; четный- нечетный, - для целых чисел связаны в математике с понятием четности:

-сумма двух четных чисел- четное число;

-сумма двух нечетных чисел – четное число;

-сумма четного и нечетного чисел- нечетное число.

Задача 1.

На доске записано несколько целых чисел, между некоторыми поставлены знаки «+» и «-» . Можно ли заменить несколько знаков на противоположные, чтобы значение выражения увеличилось на 1?

Решение. Нельзя, так как каждое изменение знака перед числом на противоположный увеличивает или уменьшает сумму всех чисел на четное число, а 1- нечетное число.

Задача 2.

Записаны четыре числа: 0, 0, 0, 1. За один ход разрешается прибавить 1 к любым двум из этих чисел. Можно ли за несколько ходов получить 4 одинаковых числа?

Решение. Сумма четырех данных чисел нечетная, а сумма четырех одинаковых чисел, которые надо получить, четная. Из первой суммы нельзя получить вторую, прибавляя несколько раз по 2.

Задача 3.

В каждой клетке доски 7х7 сидит жук. В какой-то момент времени все жуки взлетают, и после этого каждый из жуков садится в клетку, соседнюю по стороне с той, из которой он взлетел. Докажите, что в какую- то клетку не сядет ни одного жука.

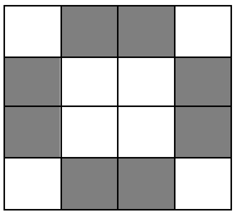
Решение. Рассмотрим шахматную раскраску доски в черный и белый цвет. Тогда у нас 25 клеток покрашено в черный цвет, а 24- в белый. Заметим, что жук, взлетевший с белой клетки, сядет на черную клетку, а взлетевший с черной- на белую. Но с белых клеток взлетают 24 жука, и они не смогут сесть на 25 клеток.

Задача 4.

В клетках квадратной таблицы 4x4 расставлены знаки «+» и «-», как показано на рисунке. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных либо в одной строке, либо в одном столбце, либо на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, в любой угловой клетке). Докажите, что, сколько бы мы ни произвели таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

+	-	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Решение.



Рассмотрим 8 отмеченных клеток. Любая операция затрагивает либо 2 клетки из этих восьми, либо ни одной. Таким образом, при указанных операциях сохраняется четность числа минусов, стоящих в отмеченных клетках. А поскольку изначально в этих клетках стоял один минус (нечетное число), то таблицу из одних плюсов мы получить не можем (так как в этом случае в отмеченных клетках будет стоять нуль минусов- четное число).

Задача 5.

У марсиан бывает произвольное число рук. Однажды все марсиане взялись за руки так, что сводных рук не осталось. Докажите, что число марсиан, у которых нечетное число рук, четно.

Решение. Назовем марсиан с четным числом рук чётными, а с нечётными- нечетными. Поскольку руки образуют пары, то общее число рук четно. Общее число рук у чётных марсиан четно, поэтому общее число рук у нечетных марсиан тоже четно. Следовательно, число нечётных марсиан четно.

Логические задачи.

Логические задачи стоят несколько особняком среди математических задач: в них как правило отсутствуют вычисления. Однако решение логических задач является обязательным компонентом подготовки к решению олимпиадных задач.

Задача 1.

Как перевезти в лодке с одного берега реки на другой волка, козу и капусту, если волк может съесть козу, а коза любит капусту. Лодочник может взять в лодку или одно из животных, или капусту.

Решение. Первым рейсом лодочник перевозит козу, привязав на берегу волка рядом с капустой. Привязывает козу на противоположном берегу и возвращается. Вторым рейсом лодочник перевозит волка, оставляя на берегу капусту. Привязывает волка на противоположном берегу и возвращается в исходную точку с козой. Третьим рейсом лодочник перевозит капусту с волком на противоположном берегу и возвращается за козой. Четвертым рейсом перевозится коза.

Задачи, предлагаемые на региональном этапе XXXVI Всероссийской математической олимпиаде школьников.

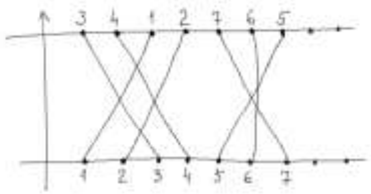
Задача 2.

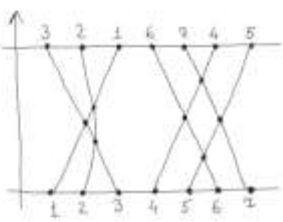
Девять лыжников ушли со старта по очереди и прошли дистанцию- каждый со своей постоянной скоростью. Могло ли оказаться, что каждый лыжник участвовал ровно в четырех обгонах? (в каждом обгоне участвуют ровно два лыжника- тот, кто обгоняет, и тот, кого обгоняют.)

Задача 3.

Семь лыжников с номерами 1,2…7 ушли со старта по очереди и прошли дистанцию- каждый со своей постоянной скоростью. Оказалось, что каждый лыжник ровно дважды участвовал в обгонах. (В каждом обгоне участвуют ровно два лыжника- тот, кто обгоняет, и тот ,кого обгоняют.) По окончании забега должен быть составлен протокол, состоящий из номеров лыжников в порядке финиширования. Докажите, что в забеге с описанными свойствами может получиться не более двух различных протоколов.

Решение.





К логическим задачам относятся и задачи, в которых необходимо выяснить итоги проводимого турнира. Отметим, что обязательно необходимо знать правило игры и схему начисления очков по итогам турнира.

Задача 4.

В шахматном турнире участвовали два ученика седьмого класса и некоторое количество учеников восьмого класса. Два семиклассника набрали восемь очков, а каждый из восьмиклассников набрал одно и то же число очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире? Найти все возможные решения. (По правилам шахматного турнира каждый из участников играет с каждым по одной партии. Если один из участников выигрывает партию, то он получает одно очко, а его противник получает нуль очков, в случае ничьей играющие получают по 0,5 очка)

Решение. Итак, пусть n –число восьмиклассников, m- число очков, набранных каждым из восьмиклассников. Тогда число очков , набранных восьмиклассниками, равно nm, а общее число очков, набранных всеми участниками турнира, равно nm +8.

С другой стороны, в турнире участвовало n+ 2 школьника. Значит, число сыгранных партий (и, значит, число набранных очков) равно (n+1)(n+2)/2. Получаем уравнение nm+8=(n+1)(n+2)/2. Откуда 2m=n+3-14/n. Мы получили уравнение решаемое в натуральных числах, тогда n- делитель числа 14. Перебор натуральных делителей показывает, что n=1 и n=2 не подходят, а n=7 (все восьмиклассники выиграли свои партии) и n=14 (все восьмиклассники сыграли свои партии вничью) подходят.

Ответ 7 или 14

Существует довольно много способов решения логических задач. Решению логических задач, в которых рассматриваются два или более конечных множеств, между которыми необходимо установить взаимно однозначное соответствие, часто помогает составление таблиц.

Принцип Дирихле.

Представим принцип Дирихле в шутливой форме: «Если в N клетках сидят не менее N+1 кроликов, то в какой- то из клеток сидит не менее двух кроликов»

Обратим внимание на расплывчатость выводов- « в какой-то из клеток», «не менее». Это является, пожалуй, отличительной чертой принципа Дирихле, которая иногда приводит к возможности неожиданных выводов на основе, казалось бы, совершенно недостаточных сведений. Доказательство самого принципа чрезвычайно просто, в нем используется тривиальный подсчет кроликов в клетках. Если бы в каждой клетке сидело не более одного кролика, то всего в наших N клетках сидело бы не более N кроликов, что противоречило бы условиям. Таким образом мы доказали принцип Дирихле методом «от противного».

6.Заключение.

Материалы этой статьи можно использовать для подготовки и проведении школьных олимпиад. Если вам не удается решить задачу сразу, не спешите смотреть решение. Пробуйте использовать другие методы решения, вернитесь к решению задачи через некоторое время. Легкие задачи чередуются с трудными. Поэтому нет необходимости решать задачи подряд. Можно решать с любого места и решать в другом порядке. Занимайтесь математикой! Эта наука раскроет вам особый мир задач; она поможет вам поверить в свои силы и никогда не останавливаться на достигнутом.

Литература

1. В. В. Волина «Занимательная математика» – СПб, 1996.
2. Я. И. Перельман «Живая математика» – М., 1974.
3. С. Акимова «Занимательная математика» – СПб, 19987.
4. Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский «Районные олимпиады» - М., 2010.
5. А. К. Ярдухин, А. К. Ярдухина «Обучающая олимпиада по математике»- Ч., 2011.
6. Е. В. Галкин «Нестандартные задачи по математике» - Чел., 2004.
7. Э. Д. Каганов «400самых интересных задач с решениями» - М 1997.